Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al VI-lea

Problemă. Să se determine lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, exprimate prin numere naturale, ştiind că aria lui este de trei ori mai mare decât perimetrul.
Soluţie: Fie a,b,c lungimile laturilor triunghiului. Cum

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 2pxy, b = p\cdot\left(x^2 - y^2\right)$ şi $a = p\cdot\left(x^2 + y^2\right), x, y \in \mathbb{N}, x > y.$

Din enunţ rezultă că

$\frac{bc}{2} = 3\cdot(a+b+c) \Leftrightarrow p^2\cdot x\cdot y\cdot\left(x^2 - y^2\right) = 3p\cdot\left(2x^2 + 2xy\right) \Leftrightarrow py(x-y) = 6;$

$p = 1 \Rightarrow y(x-y) = 6 \Rightarrow (x,y) \in \{(7,1),(5,2),(5,3),(7,6)\};$

$p = 2 \Rightarrow y(x-y) = 3 \Rightarrow (x,y) \in \{(4,1),(4,3)\};$

$p = 3 \Rightarrow y(x-y) = 2 \Rightarrow (x,y) \in \{(3,1),(3,2)\};$

$p = 6 \Rightarrow y(x-y) = 1 \Rightarrow (x,y) \in \{(2,1)\}.$

Lungimile laturilor triunghiului sunt:

$(a,b,c) \in \{(50,48,14),(29,21,20),(34,16,30),(85,13,84),(34,30,16),(30,24,18),(39,15,36)\}$

Răspuns:

$(a,b,c) \in \{(50,48,14),(29,21,20),(34,16,30),(85,13,84),(34,30,16),(30,24,18),(39,15,36)\}$